УДК 512.536

О. В. Князев

ПОЛУГРУППЫ С НАСЛЕДСТВЕННО ЧИСТЫМИ ПОДПОЛУГРУППАМИ

1. Введение

Понятие чистоты и некоторые родственные понятия, возникшие в теории абелевых групп, могут быть определены, как отмечалось в [1, 2], для произвольных универсальных алгебр. Это обстоятельство дает новый подход к изучению строения алгебр из разных классов. В [2] намечены возможные перспективы дальнейших исследований в обсуждаемом направлении. Настоящая заметка посвящена решению одной из поставленных в [2] проблем. Прежде чем сформулировать эту проблему, напомним необходимые определения.

Произвольное дизъюнктное семейство подалгебр данной алгебры называют ее *россыпью*, а члены этого семейства – *компонентами россыпи*. Через $S(A)$ обозначим множество всех россыпей алгебры A. На множестве $S(A)$ естественным образом определяется отношение частичного порядка $\leq$:

$$\{A_i \mid i \in I\} \leq \{B_j \mid j \in J\} \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \subseteq B_j).$$

Ясно, что $S(A)$ есть полная решетка, наименьшим элементом которой является пустая россыпь. Операцию пересечения в этой решетке будем обозначать через $\wedge$. *Ядром* конгруэнции ρ на данной алгебре называется россыпь, состоящая в точности из всех ρ-классов, являющихся подалгебрами.

Пусть $\mathbf{V}$ – фиксированное многообразие алгебр, $A \in \mathbf{V}$, $L(\mathbf{V})$ – решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$. Наименьшую конгруэнцию в множестве всех конгруэнций на алгебре A, фактор-алгебры по которым принадлежат многообразию $\mathbf{X}$, называют $\mathbf{X}$-*вербальной конгруэнцией* и обозначают через $\rho(\mathbf{X}, A)$. Ядро этой конгруэнции называют $\mathbf{X}$-*вербалом* алгебры A и обозначают через $\mathbf{X}(A)$.

Подалгебру B алгебры A будем называть, следуя [2], $\mathbf{X}$-*чистой* в A, если

$$\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \wedge B. \qquad (*)$$

В равенстве $(*)$ и ниже в аналогичных ситуациях на подалгебру B алгебры A мы смотрим как на одноэлементную россыпь. Если все подалгебры алгебры являются $\mathbf{X}$-чистыми, то такую алгебру называют *наследственно* $\mathbf{X}$*-чистой*. Если подалгебра алгебры является $\mathbf{X}$-чистой по любому подмногообразию $\mathbf{X}$ многообразия $\mathbf{V}$ (по любому атому $\mathbf{P}$ решетки $L(\mathbf{V})$), то ее называют *вербально чистой* (*атомно чистой*). Если все подалгебры алгебры являются вербально чистыми (атомно чистыми), то ее называют *наследственно вербально чистой* (*наследственно атомно чистой*). Наследственно вербально чистую (наследственно атомно чистую) алгебру для краткости будем называть *VP-алгеброй* (*AP-алгеброй*).

Упомянутая выше проблема (см. [2], проблема 17) формулируется так: *описать наследственно атомно чистые алгебры данного многообразия* (и та же задача для наследственно вербально чистых алгебр). Указанная проблема решена для модулей [3], вполне регулярных полугрупп [4], групп [5]. В [6–8] приводятся несколько общих утверждений о чистых алгебрах. Настоящая статья посвящена решению этой проблемы для полугрупп.

Мы будем пользоваться рядом стандартных теоретико-полугрупповых понятий, их определения можно найти в [9]. Здесь напомним только определение *крепкой полурешетки* полугрупп и *раздувания* полугруппы.

Пусть C – полурешетка, $\{S_\gamma\}_{\gamma\in C}$ – семейство попарно не пересекающихся полугрупп и для каждой пары элементов $\alpha,\beta\in C$ таких, что $\alpha\geq\beta$, задан взаимно однозначный гомоморфизм $\varphi_{\alpha,\beta}\colon S_\alpha\to S_\beta$, причем выполняются условия:

1) $\varphi_{\alpha,\alpha}$ есть тождественный автоморфизм S_α для любого α из C;

2) $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=\varphi_{\alpha,\gamma}$ для любых α,β,γ из C таких, что $\alpha\geq\beta\geq\gamma$.

На объединении $S=\bigcup_{\gamma\in C}S_\gamma$ зададим умножение $\cdot$ следующим правилом: для любых a из S_α и b из S_β положим

$$a\cdot b=a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

(Здесь в правой части перемножаются элементы $a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}$ и $b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$ из $S_{\alpha\beta}$, а $\alpha\beta$ – произведение из C.) Тогда $(S,\cdot)$ есть полугруппа, разложимая в полурешетку полугрупп S_γ. Полугруппу S называют *крепкой полурешеткой полугрупп* S_γ и обозначают через $[C;S_\gamma;\varphi_{\alpha,\beta}]$.

Пусть T – полугруппа, $\{Q_x\}_{x\in T}$ – семейство попарно не пересекающихся множеств, причем $Q_x\cap T=\{x\}$ для любого x из T. Распространим умножение в T на множество $S=\bigcup_{x\in T}Q_x$, полагая $a\cdot b=xy$ для любых $a\in Q_x$, $b\in Q_y$, $x,y\in T$. Тогда S превращается в полугруппу, называемую *раздуванием* полугруппы T; подмножество Q_x будем называть *классом раздувания*, соответствующим элементу x.

В дальнейшем все рассуждения ведутся в многообразии $\mathbf{V}$ всех полугрупп.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(1) *S – наследственно вербально чистая полугруппа;*

(2) *S – наследственно атомно чистая полугруппа;*

(3) *S есть раздувание крепкой полурешетки прямоугольных групп, структурные группы которых суть прямые произведения циклических групп простых порядков.*

2. Предварительные сведения

Мы будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbf{L}$ – многообразие полугрупп левых нулей; $\mathbf{R}$ – многообразие полугрупп правых нулей; $\mathbf{S}$ – многообразие полурешеток; $\mathbf{I}$ – многообразие всех идемпотентных полугрупп; $\mathbf{Z}$ – многообразие полугрупп с нулевым умножением; $\mathbf{A}_p$ – многообразие абелевых групп простой экспоненты p. Здесь удобно напомнить, что атомами решетки $L(\mathbf{V})$ являются многообразия $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{Z}, \mathbf{A}_p$ для всех простых p и только они.

Полугруппа S называется $\mathbf{X}$-*полной*, если ее $\mathbf{X}$-вербальная конгруэнция $\rho(\mathbf{X}, S)$ есть универсальное отношение на S. Через E_S обозначим множество всех идемпотентов полугруппы S, а через $Gr\, S$ – множество всех ее групповых элементов.

Следующие три наблюдения очевидны:

Наблюдение 1. *Если для подполугруппы T полугруппы S выполняется равенство $\rho(\mathbf{X}, S) \cap (T \times T) = \rho(\mathbf{X}, T)$, то T есть $\mathbf{X}$-чистая подполугруппа.*

Наблюдение 2. *Следующие условия для прямоугольной полугруппы S эквивалентны:*

(1) *S – $\mathbf{L}$-полная полугруппа ($\mathbf{R}$-полная полугруппа);*

(2) *S – правая связка групп (левая связка групп).*

Наблюдение 3. *Гомоморфный образ $\mathbf{X}$-полной полугруппы является $\mathbf{X}$-полной полугруппой.*

Лемма 1. *Класс раздуваний периодических вполне регулярных полугрупп является наследственно замкнутым.*

Доказательство. Пусть $S = \bigcup_{x \in T} Q_x$ есть раздувание периодической вполне регулярной полугруппы T, $C \leq S$, $q \in Q_x$, e – единица группового элемента x и $x^n = e$ для некоторого натурального n. Для доказательства леммы достаточно показать, что если $q \in C$, то и $x \in C$. Проверим это. По определению раздувания $q^n = x^n = e$, откуда $q^{n+1} = ex = x$. Следовательно, $x \in C$. Лемма доказана.

Пусть $S = [C; S_\gamma; \varphi_{\alpha,\beta}]$ – крепкая полурешетка прямоугольных групп. С полугруппой S тесно связана следующая конструкция.

Нитью называют множество $a = [a_\alpha]$ элементов a_α, взятых по одному в некоторых S_α, причем если нить a содержит элемент $a_\alpha \in S_\alpha$, то она содержит и его образы $a_\alpha\varphi_{\alpha,\beta}$ для всех $\beta < \alpha$, а также прообразы $a_\alpha\varphi^{-1}_{\gamma,\alpha}$ для всех тех $\gamma > \alpha$, для которых эти прообразы существуют. *Произведением нитей* $a = [a_\alpha]$ и $b = [b_\beta]$ называется нить, порожденная произведением $a_\gamma b_\gamma \in S_\gamma$ для любого γ, для которого существуют a_γ и b_γ (например, в качестве γ можно взять $\alpha\beta$). Нетрудно проверить, что множество всех нитей образует прямоугольную группу (*предельную полугруппу* связки C). Эту полугруппу будем обозначать через $[S]$. Заметим, что нити, определяемые всеми элементами полугруппы S_α, составляют подполугруппу $[S_\alpha]$ полугруппы $[S]$, изоморфную полугруппе S_α.

Лемма 2. *Крепкая полурешетка S прямоугольных групп является $\mathbf{L}$-полной полугруппой ($\mathbf{R}$-полной полугруппой) тогда и только тогда, когда S есть крепкая полурешетка правых групп (крепкая полурешетка левых групп).*

Доказательство. Пусть $S = [C; S_\gamma; \varphi_{\alpha,\beta}]$ – $\mathbf{L}$-полная крепкая полурешетка прямоугольных групп, $[S]$ – ее предельная полугруппа. Рассмотрим отображение θ: $S \to [S]$ такое, что $a\theta = [a]$ для всякого a из S. Легко проверить, что θ – гомоморфизм полугруппы S на прямоугольную полугруппу $[S]$. Тогда из наблюдений 2 и 3 следует, что $[S]$ – правая связка групп. Поэтому полугруппа S есть крепкая полурешетка правых групп. Очевидно, что всякая полурешетка правых групп является $\mathbf{L}$-полной полугруппой. Это утверждение и завершает доказательство леммы.

Напомним, что подполугруппа T полугруппы S называется *ретрактом* полугруппы S, если существует такой гомоморфизм θ: $S \to T$, что $t\theta = t$ для всех $t \in T$.

Следующая лемма представляет собой частный случай леммы 23 из [10].

Лемма 3. *Если периодическая полугруппа S разложима в связку унипотентных полугрупп и $Gr\,S$ есть подполугруппа, то $Gr\,S$ является ретрактом.*

Лемма 4. *Ретракт любой полугруппы является ее вербально чистой подполугруппой.*

Доказательство. Пусть T – ретракт полугруппы S. Из наблюдения 1 следует, что для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости равенства $\rho(\mathbf{X}, S) \cap (T \times T) = \rho(\mathbf{X}, T)$. Докажем его. Заметим, что $\rho(\mathbf{X}, T) \subseteq \subseteq \rho(\mathbf{X}, S)$. Значит, $\rho(\mathbf{X}, T) \subseteq \rho(\mathbf{X}, S) \cap (T \times T)$. Докажем обратное включение.

Пусть θ: $S \to T$ есть ретрактный гомоморфизм S на полугруппу T и π: $T \to T/\rho(\mathbf{X}, T)$ – естественный гомоморфизм T на фактор-полугруппу $T/\rho(\mathbf{X}, T)$. Рассмотрим конгруэнцию $\ker \pi = \{(x, y) : x, y \in T,\ x\pi = y\pi\}$ (ядро гомоморфизма π). Из определения гомоморфизма π следует, что $(x, y) \in \in \ker \pi$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \rho(\mathbf{X}, T)$. Обозначим через σ композицию гомоморфизмов θ и π. Тогда для любых x и y из T имеет место цепочка эквивалентностей

$$(x, y) \in \ker \sigma \Leftrightarrow x\sigma = y\sigma \Leftrightarrow (x\theta)\pi = (y\theta)\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\pi = y\pi \Leftrightarrow (x, y) \in \rho(\mathbf{X}, T).$$

Следовательно, $\ker \sigma \cap (T \times T) = \rho(\mathbf{X}, T)$. Но $\rho(\mathbf{X}, S) \subseteq \ker \sigma$. Значит, $\rho(\mathbf{X}, S) \cap \cap (T \times T) \subseteq \ker \sigma \cap (T \times T) = \rho(\mathbf{X}, T)$, что и требовалось доказать.

Мы будем пользоваться следующим свойством вербалов, справедливость которого для любых алгебр отмечалась еще в [11].

Лемма 5. *Для любых подмногообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ многообразия $\mathbf{V}$ из включения $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ следует, что в любой полугруппе S выполняется условие $\mathbf{Y}(S) \leq \leq \mathbf{X}(S)$.*

Поскольку группа имеет ровно один идемпотент – единицу группы, вербал $\mathbf{A}_p(S)$ всякой полугруппы S состоит из одного класса, который должен содержать все идемпотенты полугруппы S. Поэтому справедлива

Лемма 6. *Для любой полугруппы S и любого простого числа p имеет место включение $\langle E_S \rangle \leq \mathbf{A}_p(S)$.*

На всякую полугруппу S можно смотреть как на идеальное расширение своей подполугруппы S^2 с помощью полугруппы с нулевым умножением. В силу этого очевидна

Лемма 7. *$\mathbf{Z}$-вербал полугруппы S совпадает с ее подполугруппой S^2.*

Лемма 8. *Всякая подполугруппа наследственно $\mathbf{X}$-чистой полугруппы является наследственно $\mathbf{X}$-чистой.*

Доказательство. Пусть S есть наследственно $\mathbf{X}$-чистая полугруппа, T – ее подполугруппа. Докажем, что для любой подполугруппы C полугруппы T имеет место равенство $\mathbf{X}(C) = \mathbf{X}(T) \wedge C$. Очевидно, $\mathbf{X}(C) \leq \mathbf{X}(T) \wedge C$. Докажем обратное включение $\mathbf{X}(T) \wedge C \leq \mathbf{X}(C)$. Действительно, $\mathbf{X}(T) \leq \mathbf{X}(S)$. Поэтому $\mathbf{X}(T) \wedge C \leq \mathbf{X}(S) \wedge C$. По условию $\mathbf{X}(S) \wedge C = \mathbf{X}(C)$. Следовательно, $\mathbf{X}(T) \wedge C \leq \mathbf{X}(C)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Идеальные расширения периодических вполне регулярных полугрупп с помощью полугрупп с нулевым умножением и только они являются наследственно* $\mathbf{Z}$*-чистыми.*

Доказательство. Пусть S есть наследственно $\mathbf{Z}$-чистая полугруппа. По лемме 7 $S^2 = S$. Убедимся, что в подполугруппе $\mathbf{Z}(S)$ полугруппы S все элементы суть групповые элементы конечного порядка. Заметим, что если $s \in \mathbf{Z}(S)$, то $\langle s \rangle \leq \mathbf{Z}(S)$. Таким образом, $\mathbf{Z}(S) \wedge \langle s \rangle = \langle s \rangle$. Но если s есть элемент бесконечного порядка или негрупповой элемент, то $\langle s \rangle^2 = \langle s \rangle \setminus \{s\} \neq \langle s \rangle$. Поэтому для таких элементов s имеет место неравенство $\mathbf{Z}(S) \wedge \langle s \rangle \neq \mathbf{Z}(\langle s \rangle)$. Это неравенство противоречит тому, что S есть наследственно $\mathbf{Z}$-чистая полугруппа. Следовательно, всякий элемент подполугруппы $\mathbf{Z}(S)$ полугруппы S является групповым элементом конечного порядка.

Обратно, пусть S – идеальное расширение периодической вполне регулярной полугруппы T с помощью полугруппы с нулевым умножением. Тогда $\mathbf{Z}(S) = S^2 = T = Gr\, S$. Очевидно, что произвольная подполугруппа S_1 полугруппы S будет иметь ту же структуру, и потому $\mathbf{Z}(S_1) = Gr\, S_1$. Получаем, что $\mathbf{Z}(S_1) = Gr\, S_1 = Gr\, S \wedge S_1 = \mathbf{Z}(S) \wedge S_1$.

Лемма 10. *Множество всех идемпотентов всякой* AP*-полугруппы является полугруппой.*

Доказательство. Пусть S есть AP-полугруппа. Докажем, что $\langle E_S \rangle = E_S$. Предположим противное: пусть $e, f \in E_S$ и $ef \notin E_S$. Заметим, что $E_S \subseteq S^2$. Поэтому $\langle E_S \rangle \subseteq S^2$. Следовательно, $ef \in S^2$. По лемме 9 получаем, что ef – неединичный групповой элемент конечного порядка. Ясно, что найдется простое число p такое, что $\mathbf{A}_p(\langle ef \rangle) \neq \langle ef \rangle$. Но по лемме 6 $\langle E_S \rangle \leq \mathbf{A}_p(S)$. Тогда $\langle ef \rangle \leq \mathbf{A}_p(S)$. Отсюда $\mathbf{A}_p(S) \wedge \langle ef \rangle = \langle ef \rangle$. Значит, $\mathbf{A}_p(S) \wedge \langle ef \rangle \neq \mathbf{A}_p(\langle ef \rangle)$. Мы получили противоречие с тем, что S есть AP-полугруппа. Лемма доказана.

Лемма 11. *Всякая* AP*-полугруппа является связкой унипотентных полугрупп.*

Доказательство. Пусть S есть AP-полугруппа. Из лемм 9 и 10 следует, что S есть периодическая полугруппа у которой множество идемпотентов образует подполугруппу. Рассмотрим $\mathbf{I}$-вербальную конгруэнцию $\rho(\mathbf{I}, S)$ на полугруппе S. Многообразие $\mathbf{I}$ включает многообразия $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}$. Поэтому $\mathbf{I}(S) \leq \mathbf{S}(S)$, $\mathbf{I}(S) \leq \mathbf{R}(S)$ и $\mathbf{I}(S) \leq \mathbf{L}(S)$. Предположим, что хотя бы в одном классе конгруэнции $\rho(\mathbf{I}, S)$ найдутся два различных идемпотента. Тогда в этот класс будет включаться неодноэлементная полугруппа C, являющаяся или полурешеткой, или полугруппой правых нулей, или полугруппой левых нулей. Пусть полугруппа C есть полугруппа левых нулей. Тогда

$\mathbf{L}(S) \wedge C = C$ и $C \neq \mathbf{L}(\mathbf{C})$. Получаем противоречие с тем, что полугруппа S есть AP-полугруппа. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в случаях, когда C есть полурешетка или полугруппа правых нулей. Таким образом, в каждом классе конгруэнции $\rho(\mathbf{I}, S)$ содержится ровно по одному идемпотенту. Последнее и означает, что полугруппа S есть связка унипотентных полугрупп. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 распадается на следующие три леммы. Из лемм 13 и 12 будет следовать эквивалентность условий (2) и (3), а из лемм 12–14 эквивалентность условий (1) и (3).

Лемма 12. *Пусть $\mathbf{X}$ – произвольное многообразие. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(i) *S – наследственно $\mathbf{X}$-чистая полугруппа;*

(ii) *S – раздувание наследственно $\mathbf{X}$-чистой вполне регулярной полугруппы.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть S есть наследственно $\mathbf{X}$-чистая полугруппа. Из лемм 9–11 следует, что полугруппа S – связка унипотентных периодических полугрупп и $Gr\,S = S^2$. По лемме 3 $Gr\,S$ является ретрактом в S. Таким образом, полугруппа S есть идеальное ретрактное расширение периодической вполне регулярной полугруппы S^2 с помощью полугруппы с нулевым умножением. Хорошо известно (см., например, [9, с. 114]), что в этом случае S будет раздуванием вполне регулярной полугруппы S^2. По лемме 8 подполугруппа S^2 – наследственно $\mathbf{X}$-чистая.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $S = \bigcup_{x \in T} Q_x$ – раздувание наследственно $\mathbf{X}$-чистой вполне регулярной полугруппы T. Покажем, что полугруппа S является наследственно $\mathbf{X}$-чистой. Рассмотрим два возможных случая: $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{X}$ и $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$.

1. Пусть $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{X}$ и $S_1 \leq S$. Из леммы 1 следует, что $S_1 = \bigcup_{x \in T_1} Q'_x$ – раздувание полугруппы T_1, где $T_1 \leq T$, $Q'_x \subseteq Q_x$. Требуется доказать, что $\mathbf{X}(S_1) = \mathbf{X}(S) \wedge S_1$. Докажем это. Очевидно, что разбиение полугруппы S на классы раздувания Q_x определяет конгруэнцию на полугруппе S. Обозначим эту конгруэнцию через ρ. Заметим, что фактор-полугруппа S/ρ полугруппы S по этой конгруэнции изоморфна полугруппе T. Убедимся, что $\rho \subseteq \rho(\mathbf{X}, S)$. Для этого покажем, что $(q_x, x) \in \rho(\mathbf{X}, S)$ для любого x из T и любого q_x из Q_x. Можно утверждать, что для всякого $q_x \in S \backslash T$ найдется $y \in T$, находящийся с ним в одном классе конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, S)$. Действительно, если некоторые элементы из $S \backslash T$ образуют отдельные классы конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, S)$ и K – один из

таких классов, то множество $(S/\rho(\mathbf{X},S))\setminus K$ есть идеал в фактор-полугруппе $S/\rho(\mathbf{X},S)$. Фактор-полугруппа Риса по этому идеалу является полугруппой с нулевым умножением. Поэтому многообразие $\mathbf{X}$ содержит нетривиальную полугруппу с нулевым умножением. Но это противоречит тому, что $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{X}$. Итак, для всякого $q_x \in S\setminus T$ найдется $y \in T$ такой, что $(q_x, y) \in \rho(\mathbf{X},S)$. Отсюда, считая e и f единицами групповых элементов x и y соответственно, получаем $(eq_x, ey) \in \rho(\mathbf{X},S)$ и $(q_x f, yf) \in \rho(\mathbf{X},S)$. Тогда из определения раздувания следует, что пары (x, ey) и (xf, y) принадлежат конгруэнции $\rho(\mathbf{X},S)$. Но тогда пары (xf, ey) и (x, xf) также принадлежат $\rho(\mathbf{X},S)$. Следовательно, $(x,y) \in \rho(\mathbf{X},S)$. Отсюда получаем, что $(q_x, x) \in \rho(\mathbf{X},S)$. Мы доказали, что $\rho \subseteq \rho(\mathbf{X},S)$. Из включения $\rho \subseteq \rho(\mathbf{X},S)$, в силу второй теоремы об изоморфизмах, следует, что $\mathbf{X}(S) = \{\bigcup_{x\in A} Q_x : A \in \mathbf{X}(T)\}$.

Из условия, что полугруппа T есть наследственно $\mathbf{X}$-чистая полугруппа, получаем, что $\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(T) \wedge T_1$. Поэтому полугруппа B принадлежит вербалу $\mathbf{X}(T_1)$ тогда и только тогда, когда найдется полугруппа $A \in \mathbf{X}(T)$ такая, что $B = A \cap S_1$. Отсюда

$$\mathbf{X}(S) \wedge S_1 = \{\bigcup_{x\in A} Q_x : A \in \mathbf{X}(T)\} \wedge (\bigcup_{x\in T_1} Q'_x) =$$
$$= \{\bigcup_{x\in A\cap S_1} Q'_x : A \in \mathbf{X}(T)\} = \{\bigcup_{x\in B} Q'_x : B \in \mathbf{X}(T_1)\} = \mathbf{X}(S_1).$$

Случай, когда $\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{X}$, рассмотрен.

2. Пусть $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$. Нетрудно понять, что полугруппа T является ретрактом полугруппы S. В силу леммы 4 $\mathbf{X}(S) \wedge T = \mathbf{X}(T)$. По лемме 7 $\mathbf{Z}$-вербал полугруппы S равен S^2. Очевидно, что $T = S^2$. По условию $\mathbf{X}(S) \leq \mathbf{Z}(S)$. Следовательно, $\mathbf{X}(S) \wedge T = \mathbf{X}(S)$ и потому $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}(S)$. Пусть $S_1 \leq S$. Полугруппа S_1 является раздуванием вполне регулярной наследственно $\mathbf{X}$-чистой полугруппы T_1, где $T_1 \leq T$. Поэтому $\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(S_1)$. Тогда

$$\mathbf{X}(S) \wedge S_1 = \mathbf{X}(T) \wedge S_1 = \mathbf{X}(T) \wedge (S_1 \cap T) =$$
$$= \mathbf{X}(T) \wedge T_1 = \mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(S_1).$$

Лемма доказана.

В [4] были найдены все вполне регулярные AP-полугруппы в многообразии всех унарных вполне регулярных полугрупп. Ими оказались крепкие полурешетки прямоугольных групп, структурные группы которых суть прямые произведения циклических групп простых порядков и только они. Поскольку всякое многообразие периодических вполне регулярных полугрупп является и обычным полугрупповым многообразием, а многообразия $\mathbf{A}_p$ для всех простых p, $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ и только они суть атомы решетки подмногообразий многообразия всех унарных вполне регулярных полугрупп, мы можем воспользоваться указанным результатом из [4] в полугрупповой ситуации. Для этого нам остается заметить, что $\mathbf{Z}(S) = S$ для любой вполне регулярной полугруппы (см. лемму 7). Итак, из упомянутого результата работы [4] вытекает

Лемма 13. *Вполне регулярная полугруппа S является AP-полугруппой тогда и только тогда, когда S есть крепкая полурешетка прямоугольных групп, структурные группы которых суть прямые произведения циклических групп простых порядков.*

Лемма 14. *Всякая вполне регулярная AP-полугруппа является VP-полугруппой.*

Доказательство. Пусть S есть вполне регулярная AP-полугруппа. Тогда по лемме 13 полугруппа S будет крепкой полурешеткой прямоугольных групп, структурные группы которых суть прямые произведения циклических групп простых порядков. Покажем, что для всякого полугруппового многообразия $\mathbf{X}$ полугруппа S является наследственно $\mathbf{X}$-чистой. Предположим, напротив, что полугруппа S не является наследственно $\mathbf{X}$-чистой. Тогда в S найдется подполугруппа S_1 такая, что $\mathbf{X}(S) \wedge S_1 \neq \mathbf{X}(S_1)$. Следовательно, конгруэнция $\rho(\mathbf{X}, S_1)$ строго содержится в конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, S) \bigcap (S_1 \times S_1)$. При этом для любой компоненты X россыпи $\mathbf{X}(S) \wedge S_1$ (а все они суть подполугруппы полугруппы S_1) имеет место включение $\mathbf{X}(X) \leq \mathbf{X}(S_1)$. Поэтому найдется компонента S_2 россыпи $\mathbf{X}(S) \wedge S_1$ такая, что $\mathbf{X}(S_2) \neq S_2$. Следовательно, в полугруппе S есть подполугруппа S_2 такая, что $S_2 \leq \mathbf{X}(S)$ и $\mathbf{X}(S_2) \neq S_2$. Убедимся, что такой подполугруппы в S быть не может. Доказательство будем проводить, рассматривая все возможные варианты вхождения атомов решетки полугрупповых многообразий в многообразие $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{X}$. По условию полугруппа S является наследственно $\mathbf{L}$-чистой полугруппой. Значит, для всякой ее подполугруппы K такой, что $K \leq \mathbf{L}(S)$, имеет место равенство $\mathbf{L}(K) = K$, т. е. K есть $\mathbf{L}$-полная полугруппа. По нашему предположению $\mathbf{X}(S) \leq \mathbf{L}(S)$. Поэтому по лемме 2 подполугруппа S_2 есть полурешетка правых групп. Гомоморфный образ полурешетки правых групп также является полурешеткой правых групп. Отсюда, учитывая, что $\mathbf{X}(S_2) \neq S_2$, получаем, что многообразие $\mathbf{X}$ наряду с атомом $\mathbf{L}$ должно содержать хотя бы один из атомов $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ или $\mathbf{A}_p$ для некоторого простого p. Пусть это будет атом $\mathbf{R}$. Тогда $\mathbf{X}(S) \leq \mathbf{R}(S)$. По условию полугруппа S является наследственно $\mathbf{R}$-чистой полугруппой. Таким образом, подполугруппа S_2 полугруппы S является $\mathbf{R}$-полной. Следовательно, по лемме 2 полугруппа S_2

есть полурешетка групп. Это означает, что многообразие $\mathbf{X}$ наряду с атомами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ должно содержать хотя бы один из атомов $\mathbf{S}$ или $\mathbf{A}_p$. Пусть это будет $\mathbf{A}_p$. Тогда $\mathbf{X}(S) \le \mathbf{A}_p(S)$. Следовательно, полугруппа S_2 должна быть $\mathbf{A}_p$-полной. В этом случае, как нетрудно понять, S_2 обязана быть полурешеткой групп, являющихся прямыми произведениями циклических групп, порядки которых суть простые числа, отличные от p. Тогда многообразие $\mathbf{X}$ обязано содержать хотя бы один из атомов $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}_q$ для некоторых простых q. Пусть это будет атом $\mathbf{A}_r$ $(r \neq p)$. Тогда подполугруппа S_2 есть полурешетка групп, являющихся прямыми произведениями циклических групп простых порядков, не равных p и r. Мы приходим к выводу, что полугруппа S_2 является полурешеткой. Гомоморфный образ полурешетки есть полурешетка. Следовательно, многообразие $\mathbf{X}$ содержит атом $\mathbf{S}$. Полугруппа S_2 по условию является $\mathbf{S}$-полной полугруппой. Но только одноэлементная полурешетка может быть $\mathbf{S}$-полной полугруппой. Мы получили противоречие с тем, что $\mathbf{X}(S_2) \neq S_2$. Таким образом наше предположение о том, что S не является наследственно $\mathbf{X}$-чистой полугруппой, оказалось неверным.

Рассуждения в случаях других возможных вариантов вхождения атомов решетки полугрупповых многообразий в многообразие $\mathbf{X}$ проводятся аналогично, и мы их опускаем. Лемма доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Л. Н. Шеврину за полезные советы по оформлению статьи.

Литература

1. Martynov L. M. On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility, and purity for arbitrary algebras // Intern. Conf. on Modern Algebra and Its Applications. Vanderbilt University, Nashville, Tennesse, May 14–18, 1996. Schudule and Abstracts. P. 79–80.

2. Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. Международ. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

3. Корнев А. И. О модулях с чистыми подмодулями // Там же. С. 144–152.

4. Князев О. В. Клиффордовы полугруппы с чистыми подполугруппами / Рукопись представлена Сиб. матем. журн. М., 2000. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 30.03.00, № 861-В00.

5. Князев О. В. Группы с относительно чистыми подполугруппами // Международ. семинар по теории групп, посвящ. 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина: Тез. докл., Екатеринбург, 17–21 дек. 2001 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. С. 103–104.

6. Князев О. В. О чистых алгебрах с выделенным идемпотентом // Математика и информатика: наука и образование: Межвуз. сб. науч. тр.: Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. Вып. 1. С. 10–13.

7. Князев О. В. О чистых алгебрах // Вестн. Омск. ун-та. 2001. № 3. С. 18–20.

8. Князев О. В. Об абсолютно чистых алгебрах с выделенным идемпотентом // Математика и информатика: наука и образование: Межвуз. сб. науч. тр.: Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. Вып. 2. С. 23–26.

9. Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра / Под ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2, гл. 4.

10. Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. II // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 9. С. 153–176.

11. Шеврин Л. Н., Мартынов Л. М. О достижимых классах алгебр // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1363–1381.

Статья поступила 08.04.2004 г.